



# مشاوره تحصیلی هیوا

تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مشاوره تخصصی ثبت نام مدارس ، برنامه ریزی درسی و آمادگی  
برای امتحانات مدارس

برای ورود به صفحه مشاوره مدارس کلیک کنید

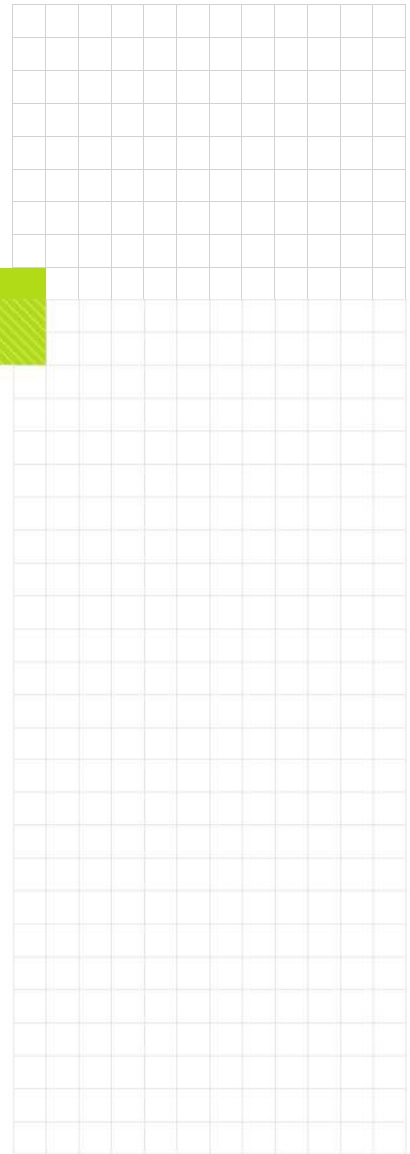
برای ورود به صفحه نمونه سوالات امتحانی کلیک کنید

تماس با مشاور تحصیلی مدارس

۹۰۹۹۰۷۱۷۸۹



تماس از تلفن ثابت



## معرفی فضای $\mathbb{R}^2$

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند  $(a, b)$  که  $a, b \in \mathbb{R}$  مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتب  $(x, y)$  نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه  $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$  شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با  $\mathbb{R}^2$  نمایش می‌دهند، یعنی:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت  $ax + by = c$  است که در آن  $a, b, c \in \mathbb{R}$  و  $a$  و  $b$  هم‌زمان صفر نیستند).

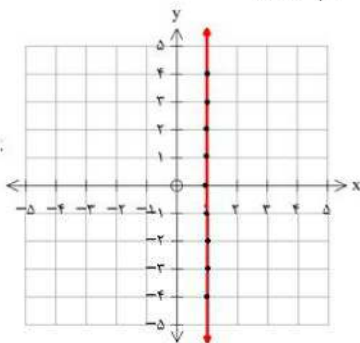
به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار  $G$  را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار  $G$  در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار  $G$  قرار دارد.

با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در  $\mathbb{R}^2$  یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل‌های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نماییم.

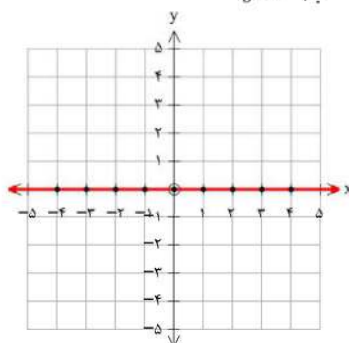
### کاردرکلاس

۱- برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

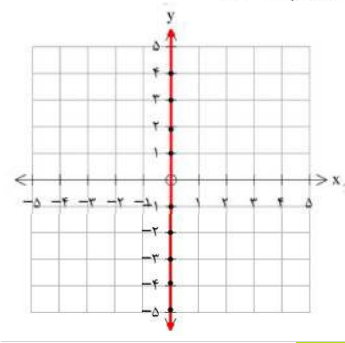
(ب)  $x = 1$



(ب)  $y = 0$

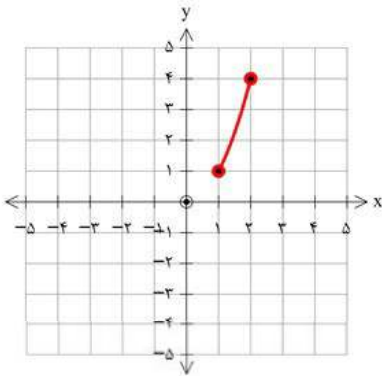


(الف)  $x = 0$

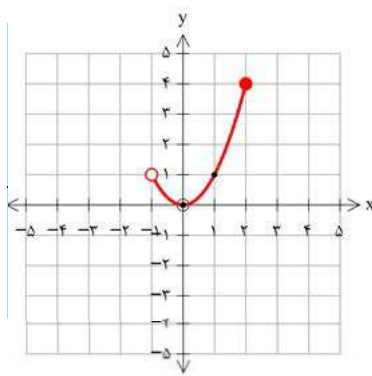


# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

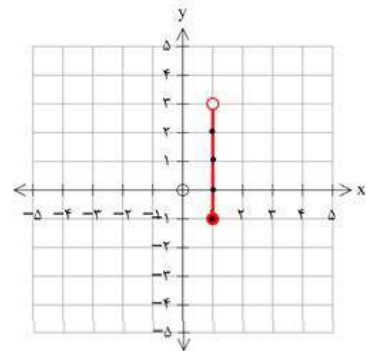
ج)  $y = x^2, 1 \leq x \leq 2$



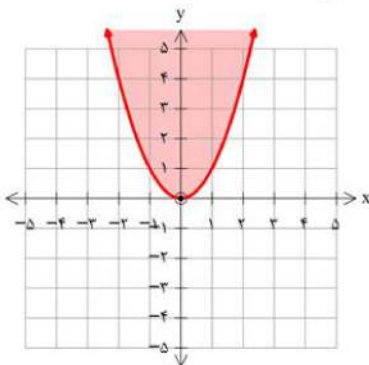
ث)  $y = x^2, -1 < x \leq 2$



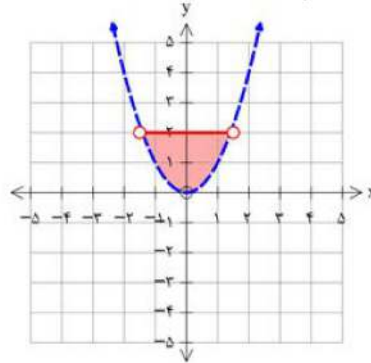
ت)  $x = 1, -1 \leq y < 3$



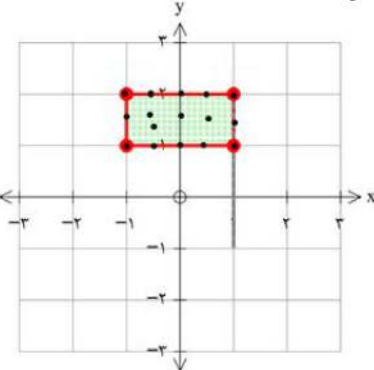
خ)  $y \geq x^2$



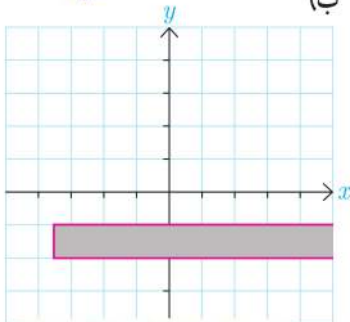
ز)  $x^2 < y \leq 2$



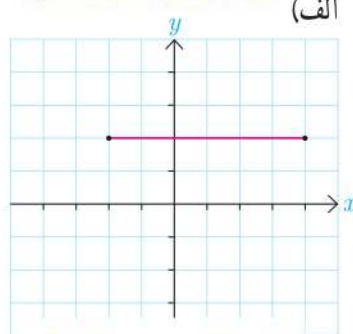
چ)  $-1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$



ب)  $x \geq \frac{-y}{2}, -2 \leq y \leq -1$

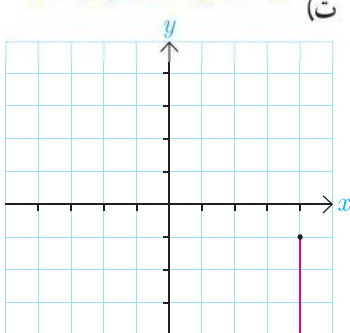


الف)  $y = 2; -2 \leq x \leq 4$

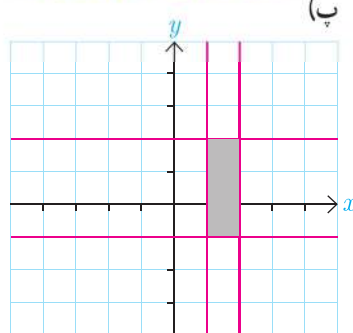


۲- در هر یک از شکل‌های روبه‌رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.<sup>۱</sup>

ت)  $x = 4, -4 \leq y \leq -1$



پ)  $1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$



۱- صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.

حال به سراغ فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای  $\mathbb{R}^3$  و مجموعه تمام سه‌تایی‌های  $(a,b,c)$  که در آن  $a, b, c \in \mathbb{R}$  برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ما دستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیریم.

### ■ معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

مشابه  $\mathbb{R}^2$  می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب  $(x, y, z)$  که در آنها  $x, y, z$  اعداد حقیقی اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای  $\mathbb{R}^3$  می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

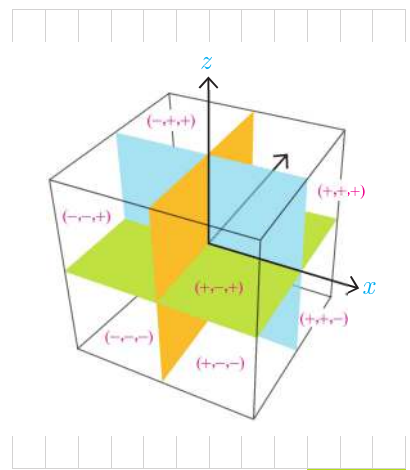
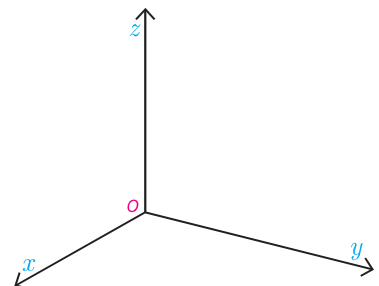
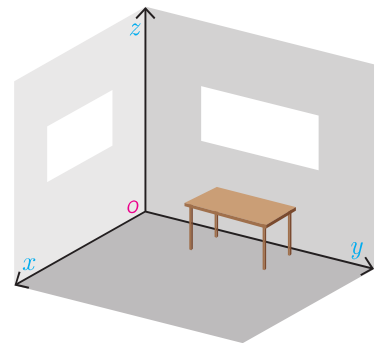
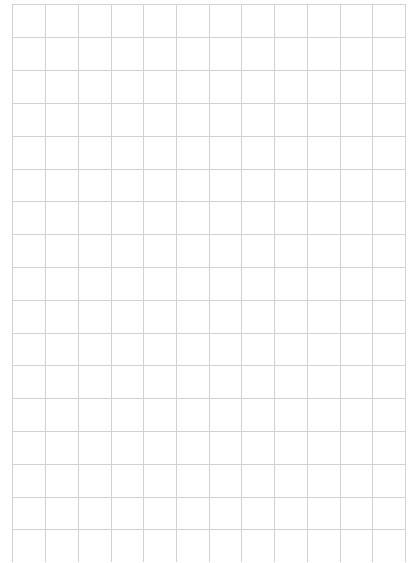
به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط  $\mathbb{R}^2$  از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود برهم  $x$  و  $y$  استفاده می‌شود. به طور مشابه می‌توان فضای  $\mathbb{R}^3$  را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود برهم که در نقطه‌ای مانند  $O$  متقاطع اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود برهم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کنج<sup>۱</sup> می‌دهند.

محورهای  $Ox$ ،  $Oy$  و  $Oz$  به ترتیب محور  $x$ ‌ها، محور  $y$ ‌ها و محور  $z$ ‌ها نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت‌اند از صفحه  $xy$  (کف اتاق) شامل محور  $x$ ‌ها و  $y$ ‌ها، صفحه  $yz$  (دیوار سمت راست) شامل محور  $y$ ‌ها و  $z$ ‌ها، صفحه  $xz$  (دیوار سمت چپ) شامل محور  $x$ ‌ها و  $z$ ‌ها هستند. جهت مثبت هر یک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه  $O$ ) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه  $\mathbb{R}^3$  به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه  $xy$  و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه  $xy$  هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه  $xy$  مطابق با شماره گذاری استاندارد یک دستگاه  $\mathbb{R}^2$  شماره گذاری می‌شوند.

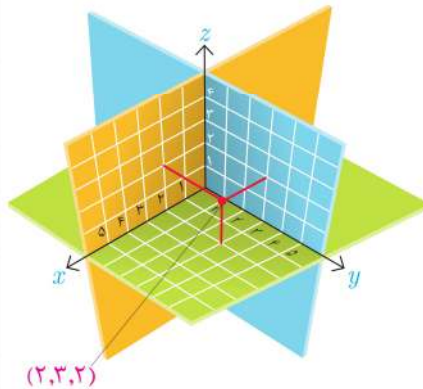
شماره ناحیه	علامت محورها		
	$x$	$y$	$z$
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

مثلاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه  $xy$  از ۵ تا ۸ شماره گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول روبه‌رو مشخص شده‌اند.

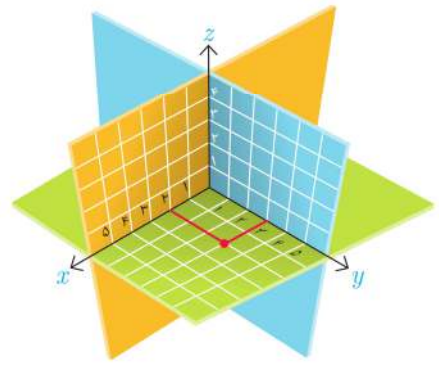
۱- از برخورد سه صفحه دو به دو متقاطع، یک کنج تشکیل می‌شود.



برای نمایش سه تایی مرتب  $(x_0, y_0, z_0)$  در دستگاه مختصات  $\mathbb{R}^3$  کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه  $(x_0, y_0)$  را در صفحه  $xy$  بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه  $z_0$  در راستای موازی با محور  $z$  ها (یعنی به طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.

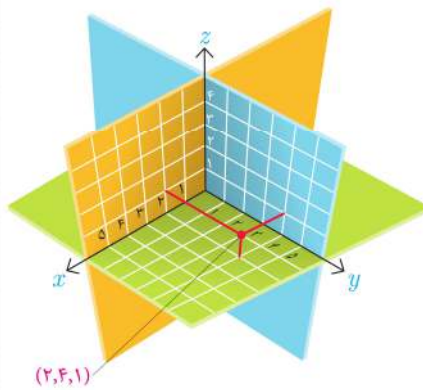


شکل شماره ۲

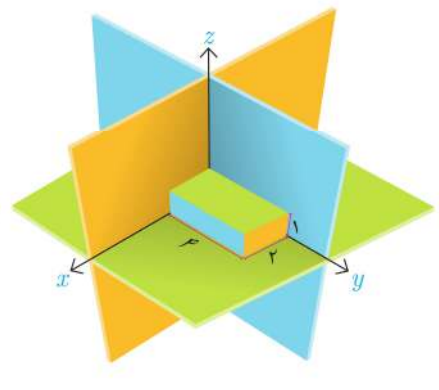


شکل شماره ۱

در واقع، می توان سه نقطه به طول های  $x_0, y_0, z_0$  به ترتیب بر روی محورهای  $x, y, z$  در نظر گرفت و سپس صفحه گذرنده از  $x_0$  و موازی با صفحه  $yz$ ، صفحه گذرنده از  $y_0$  و موازی با صفحه  $xz$  و صفحه گذرنده از  $z_0$  و موازی با صفحه  $xy$  را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول  $x_0$ ، عرض  $y_0$  و ارتفاع  $z_0$  است که نمایش دهنده سه تایی مرتب  $(x_0, y_0, z_0)$  می باشد. مثلاً نقطه  $P$  در شکل زیر متناظر با سه تایی مرتب  $(2, 4, 1)$  است.



$(2, 4, 1)$



## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

همچنین نقطه  $O$  که مبدأ مختصات است متناظر سه تایی مرتب  $(\circ, \circ, \circ)$  می باشد.  
 دو نقطه  $P = (x_0, y_0, z_0)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  را برهم منطبق گوئیم و می نویسیم  $P = Q$   
 هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی  $x_0 = x_1, y_0 = y_1, z_0 = z_1$ .

برای یافتن فاصله یک نقطه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  $P = (x_0, y_0, z_0)$  از مبدأ مختصات کافی است از نقطه  $P$  عمودی بر صفحه  $xy$  رسم کرده و پای عمود را  $P'$  بنامیم. در این صورت با توجه به شکل مقابل از قضیه فیثاغورس طول پاره خط  $OP'$  به صورت زیر محاسبه می شود.

$$|OP'| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه  $OPP'$  از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر  $OP$  استفاده می کنیم. پس داریم:

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z_0^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

رابطه فوق را می توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از  $\mathbb{R}^3$  مانند  $P = (x_0, y_0, z_0)$  و  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  به صورت زیر تعمیم داد.

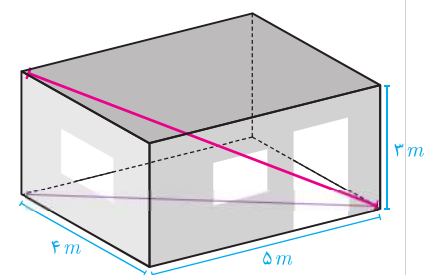
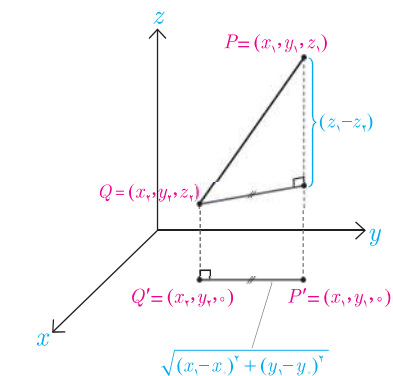
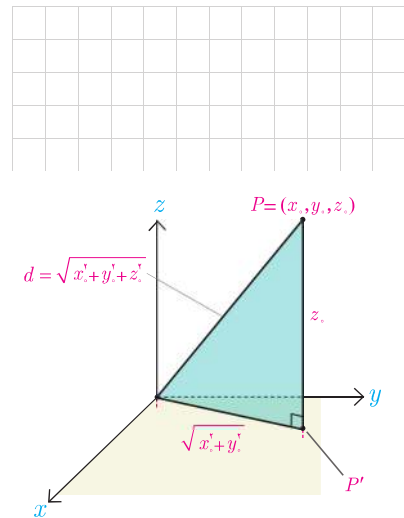
$$|PQ| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

**مثال:** در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟

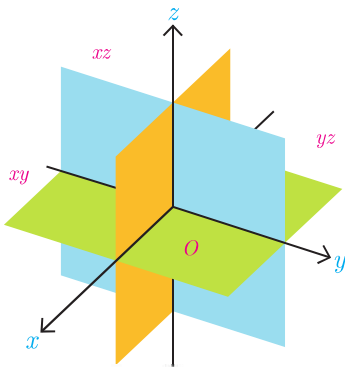
$$\text{قطر اتاق} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \Rightarrow \text{قطر اتاق} = \sqrt{41 + 3^2} = 5\sqrt{2}$$

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می پردازیم.

**مثال:** فرض کنید معادله  $x = 0$  داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق می کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی  $x$  برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله  $\mathbb{R}^2$  است یا  $\mathbb{R}^3$ .



## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور



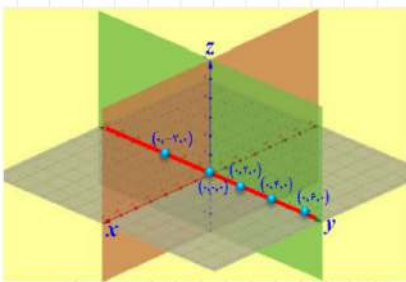
قبلاً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در  $\mathbb{R}^2$  محور  $y$  هاست. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از  $\mathbb{R}^3$  را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تایی‌هایی به صورت  $(0, y, z)$  به طوری که  $y, z \in \mathbb{R}$ . همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار  $y$  و  $z$  هر چه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله  $x=0$  صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر  $y$  و  $z$  آزاد هستیم. مثلاً نقاط  $(0, -1, 5)$  و  $(0, 1, 2)$ ,  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, -3, -1)$  همگی در معادله صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادله  $x=0$  صدق می‌کنند و این همان صفحه  $yz$  است.

### فعالیت ۱

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله  $x=0$  در  $\mathbb{R}^3$  تمام نقاط صفحه  $yz$  است (به عبارتی  $x=0$  معادله صفحه  $yz$  است) و دیدیم که نقاط مختلفی با  $y$  و  $z$ های دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه  $yz$  به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر  $x=0$  شرط  $z=0$  را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه  $yz$  سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها  $z=0$  باشد).

۱- مختصات چند نقطه را که در رابطه  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲- نمودار مربوط به معادلات  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار



معادله  $x=0$  دارد؟  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  همان محور  $y$ ها است اما  $x=0$  همان صفحه  $yz$  است که شامل محور  $y$ ها نیز می‌باشد

**مثال:** روی صفحه  $z=1$  نقاط  $A=(1, 2, 1)$  و  $B=(2, 2, 1)$  و  $C=(3, 2, 1)$  را در نظر می‌گیریم، مؤلفه دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه مزبور ( $z=1$ ) تمام نقاطی که مؤلفه دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن

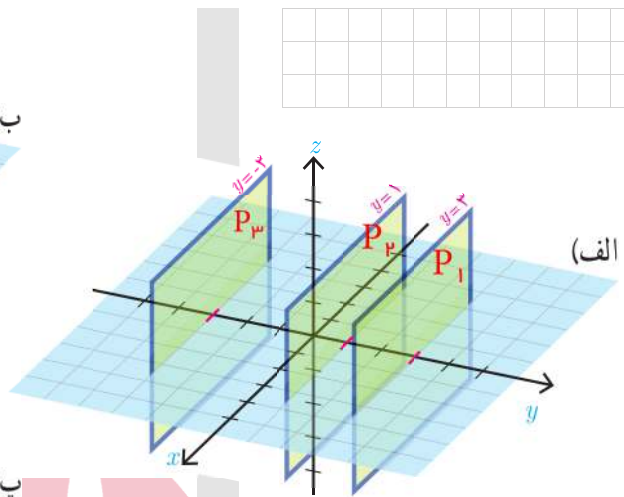
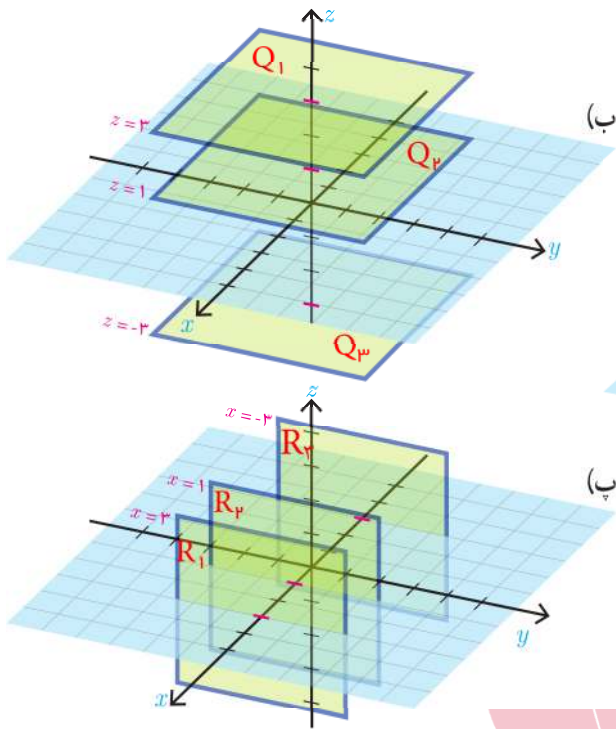
$$\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

یک خط است به معادلات

### کاردرکلاس

۱- در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.

# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور



۲- وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات  $x=1, x=3, y=1, y=4, z=-2, z=2$  هستند.

(الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

(ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

(پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

(ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

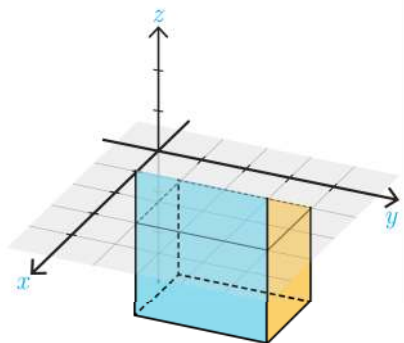
(ث) روابط مشخص‌کننده یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

(ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

(چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

(ح) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.



۱- طرح چنین سؤال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشد.



$$\begin{aligned} P_1: y = 3 &\rightarrow (-v, 3, -4) \in P_1, (0, 3, 1) \in P_1 \\ P_2: y = 1 &\rightarrow (-1, 1, 5) \in P_2, (2, 1, 4) \in P_2 \\ P_3: y = -3 &\rightarrow (5, -3, -1) \in P_3, (1, -3, 2) \in P_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1: z = 3 &\rightarrow (1, 2, 3) \in Q_1, (4, -1, 3) \in Q_1 \\ Q_2: z = 1 &\rightarrow (3, 1, 1) \in Q_2, (-5, 2, 1) \in Q_2 \\ Q_3: z = -3 &\rightarrow (7, 4, -3) \in Q_3, (-1, 5, -3) \in Q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1: x = 3 &\rightarrow (3, -1, 6) \in R_1, (3, 4, 1) \in R_1 \\ R_2: x = 1 &\rightarrow (1, 1, 1) \in R_2, (1, 4, 7) \in R_2 \\ R_3: x = -3 &\rightarrow (-3, 1, 2) \in R_3, (-3, 5, 5) \in R_3 \end{aligned}$$

ج)

د)

کاردرکلاس ۲: الف)

$$(1, 2, 1) - (3, 3, 0) - (2, 1, 1) - (2, 4, 0) - (2, 2, -2) - (2, 3, 2)$$

$$(1, 1, 0) - (3, 4, 1) - (1, 2, -2)$$

ب)

پ)

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ z=-\mu \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=\mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ z=\mu \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4 \\ z=\mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\mu \\ y=1 \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\mu \\ z=-\mu \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4 \\ z=-\mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\mu \\ y=4 \\ -\mu \leq z \leq \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\mu \\ z=\mu \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=-\mu \\ 1 \leq x \leq \mu \end{cases}$$

@Faragiri12

$$\begin{aligned} & (1, 1, -2) \quad (3, 1, 2) \quad (1, 4, 2) \quad (3, 4, 2) \\ & (1, 1, 2) \quad (3, 1, -2) \quad (1, 4, -2) \quad (3, 4, -2) \end{aligned}$$

ت

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ y = 1 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ y = 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

ث

ج نقطه  $(2, 3, 1)$  درون مکعب و نقطه  $(1, 2, 0)$  روی وجه قرار دارد

ح درون مکعب: یکدام از محتمل مساوی نزاروین و صد و دوازده شده اند

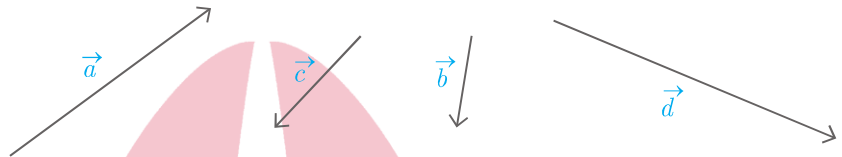
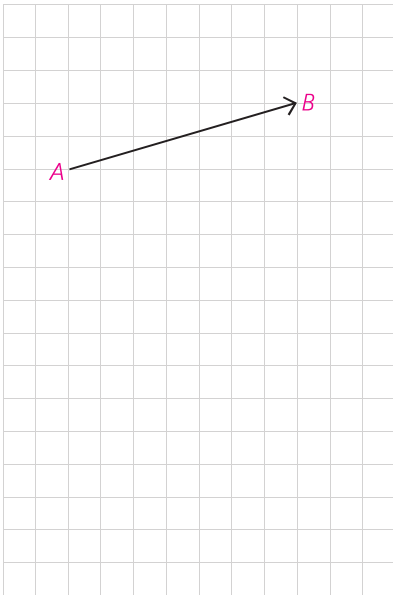
روی یک وجه: یکی از محتمل مساوی داشته اند و صد و بیست و یک محتمل دیگرین و صد و سی و سه شده اند

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

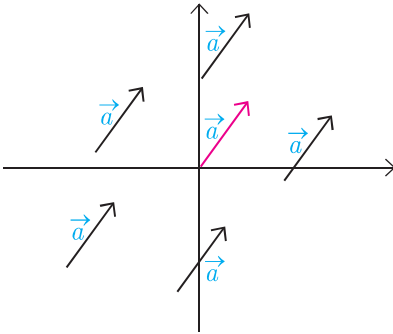
ح

## بردارها در $\mathbb{R}^2$

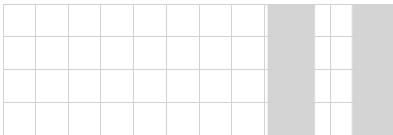
در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت دار مانند  $AB$  در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن  $A$  و انتهای آن  $B$  می‌باشد. این بردار را با  $\vec{AB}$  و اندازه آن را با  $|\vec{AB}|$  نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند  $\vec{a}$  و اندازه طول آن را با  $|\vec{a}|$  نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.



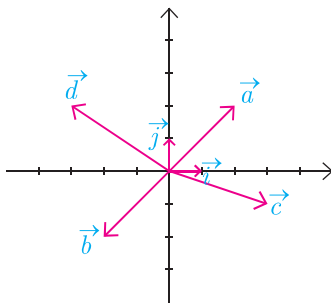
دو بردار را مساوی یا همسنگ گوئیم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چرا که جهت و اندازه آنها برابر است.



واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه در نظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود. برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را به عنوان نماینده بردارهای همسنگ در نظر می‌گیرند. مثلاً در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ  $\vec{a}$  می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر می‌گیرند.

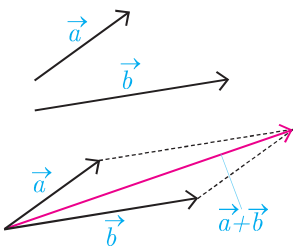


با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهایی آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این رو هر بردار مانند  $\vec{a}$  را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  که  $(a_1, a_2)$  مختصات انتهای بردار  $\vec{a}$  می‌باشد.



$$\vec{c} = (3, -1)$$

**مثال:** بردارهای  $\vec{a} = (2, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, -2)$ ,  $\vec{c} = (2, -1)$ ,  $\vec{d} = (-3, 2)$ ,  $\vec{i} = (1, 0)$  و  $\vec{j} = (0, 1)$  در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم شده‌اند.



از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  از روش متوازی‌الاضلاع به صورت زیر به دست می‌آید و به آن برابری دو بردار  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  می‌گویند.

و نیز اگر داشته باشیم  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  می‌توان نوشت:

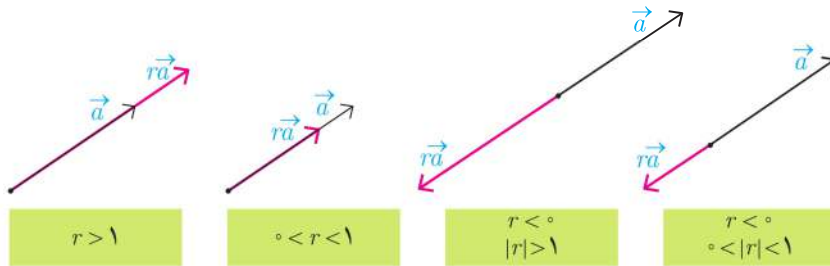
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

## هيوآ تخصصی ترين سايت مشاوره کشور

همچنين اگر  $r \in \mathbb{R}$  و  $\vec{a}$  يك بردار باشد، آنگاه بردار  $r\vec{a}$  به صورت زير تعريف می شود:

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

می توان نشان داد دو بردار  $\vec{a}$  و  $r\vec{a}$  همواره با هم موازی اند و برعکس اگر دو بردار مانند  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است. در شکل های زير وضعیت دو بردار  $\vec{a}$  و  $r\vec{a}$  در حالت های مختلف نشان داده شده اند.



به طور خاص وقتی  $r = -1$  بردار  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$  حاصل می شود که آن را قرینه بردار  $\vec{a}$  می نامند. با توجه به تعريف قرینه يك بردار می توان برای تفاضل دو بردار نوشت:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

به نظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

### جمع اولی با قرینه دومی

معمولاً مبدأ مختصات را به عنوان بردار صفر در نظر می گیرند و با  $\vec{O} = (0, 0)$  نمایش می دهند.

با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  را می توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار  $\vec{a}$  به صورت زیر به دست می آید.

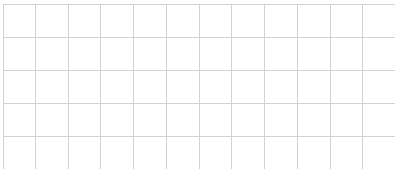
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل سازی ها دارند. به طور نمونه بنا به گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می دهد. یکی از سخت ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود (مسیر باند فرود) می وزد. در این شرایط خلبان می بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار



## هيوآ تخصصی ترین سايت مشاوره کشور

گيرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می گویند. بردارها برای مدل سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می باشند. اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



هواپیما در حال نزدیک شدن به باند فرود



اولین برخورد هواپیما با باند فرود



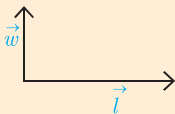
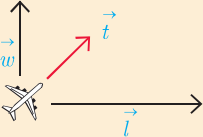
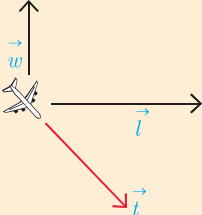
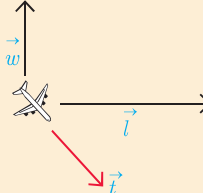
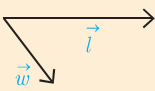
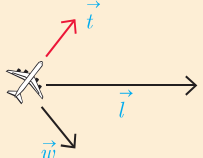
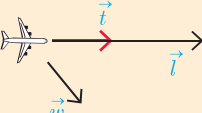
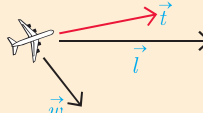
هواپیما بر روی باند فرود و در حال کاهش سرعت



توقف کامل

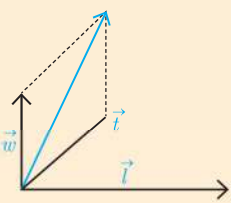
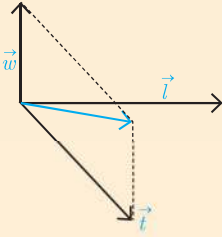
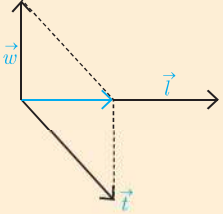
**مثال:** فرض کنید مسیر فرود (خط فرود) در جهت بردار  $\vec{t}$  و حداکثر نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیرویی در جهت بردار  $\vec{w}$  به هواپیما وارد می کند. در هریک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می تواند قرار دهد، به طوری که یک فرود ایمن داشته باشد یعنی برآیند نیروی محرکه  $\vec{t}$  و نیز  $\vec{w}$  در جهت  $\vec{t}$  باشد.



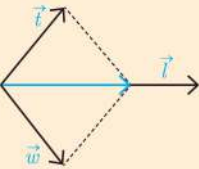
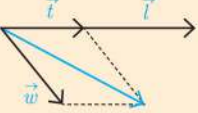
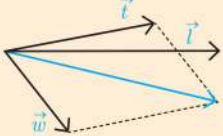
			
الف	الف-۱	الف-۲	الف-۳
			
ب	ب-۱	ب-۲	ب-۳

## هيوآ تخصصی ترين سايت مشاوره کشور

**پاسخ:** در مورد وضعیت الف براین بردارهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{t}$  (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

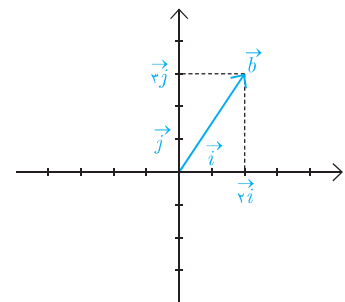
الف-۱	الف-۲	الف-۳
		
بردار برآیند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از بالای باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{t}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{t}$ است. بنابراین $\vec{t}$ فرود ایمن است.

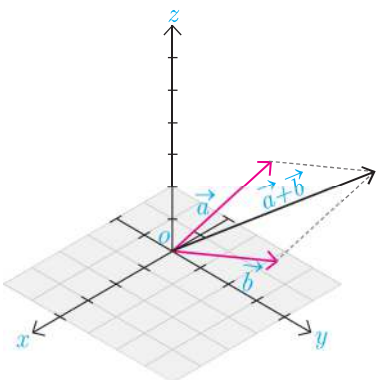
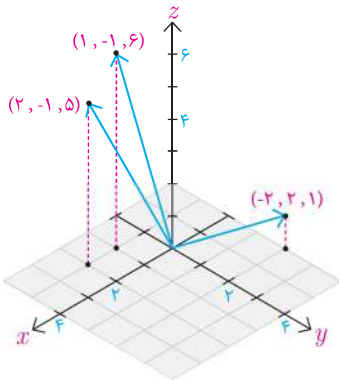
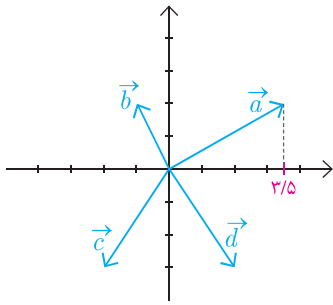
در مورد وضعیت ب براین بردارهای  $\vec{w}$  (نیروی باد) و  $\vec{t}$  (نیروی محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

ب-۱	ب-۲	ب-۳
		
بردار برآیند در جهت $\vec{t}$ است و اندازه آن کمتر از $\vec{t}$ است. بنابراین فرود ایمن است.	بردار برآیند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)	بردار برآیند در جهت $\vec{t}$ نیست و هواپیما از باند فرود خارج می شود (خروج از پایین باند)

معمولاً بردار به طول واحد در جهت محور  $x$  ها را با  $\vec{i}$  و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور  $y$  ها را با  $\vec{j}$  نمایش می دهند. در شکل مقابل بردار  $\vec{i} = (1, 0)$  و  $\vec{j} = (0, 1)$  و نیز بردار  $\vec{b} = (2, 3)$  به صورت حاصل جمع مضاربی از  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  نمایش داده شده اند. به طور کلی می توان هر بردار دلخواه مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  را به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$





۱- در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.

الف) مختصات بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه بردارهای  $\vec{c}$  و  $\vec{b}$  را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.

ج) مؤلفه‌های بردارهای  $\vec{a} - \vec{b}$  و  $\vec{d} - \vec{c}$  را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.

د) هر یک از بردارهای  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{d} - \vec{c}$  را برحسب بردارهای واحد  $\vec{i}, \vec{j}$  به دست آورید.

### ■ بردارها در $\mathbb{R}^3$

مشابه بردارهای  $\mathbb{R}^2$  می‌توان به هر نقطه از  $\mathbb{R}^3$ ، برداری که از مبدأ شروع می‌شود نظیر کرد. مثلاً فرض کنید  $A = (a_1, a_2, a_3)$  نقطه‌ای غیر از مبدأ  $\mathbb{R}^3$  باشد. در این صورت پاره‌خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  شروع شده و در نقطه  $A$  پایان می‌یابد یک بردار در  $\mathbb{R}^3$  را مشخص می‌کند و آن را با  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  نشان می‌دهیم. در بردار  $\vec{a}$  مقادیر  $a_1, a_2, a_3$  را مؤلفه‌های بردار  $\vec{a}$  می‌گویند. همچنین قرارداد می‌کنیم که مبدأ مختصات یعنی  $O = (0, 0, 0)$  نمایشگر بردار  $\vec{O} = (0, 0, 0)$  است که بردار صفر نامیده می‌شود. به عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در  $\mathbb{R}^3$  نمایش داده شده است.

### ■ طول بردار در $\mathbb{R}^3$

با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از  $\mathbb{R}^3$ ، طول هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  در  $\mathbb{R}^3$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

### ■ حاصل جمع دو بردار در $\mathbb{R}^3$

حاصل جمع دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  به صورت زیر تعریف می‌شود که به آن بردار برابند نیز می‌گویند.

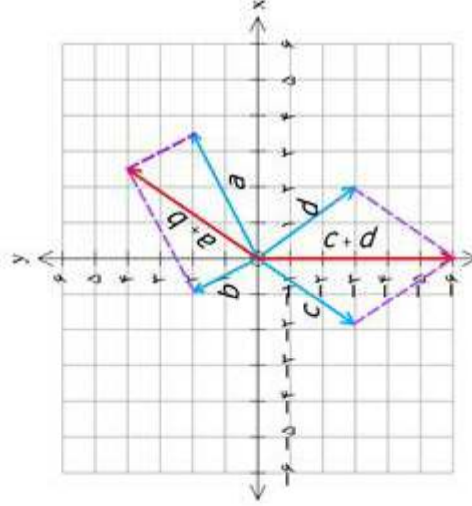
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

این شکل بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{a} + \vec{b}$  را در دستگاه  $\mathbb{R}^3$  نشان می‌دهد.

همان‌طور که از شکل روبه‌رو پیداست برای هر دو بردار غیر صفر  $\vec{a}, \vec{b}$  می‌توان روش متوازی‌الاضلاع را در صفحه‌ای که از آن دو بردار می‌گذرد به کار برد و بردار برابند  $\vec{a} + \vec{b}$  را یافت.



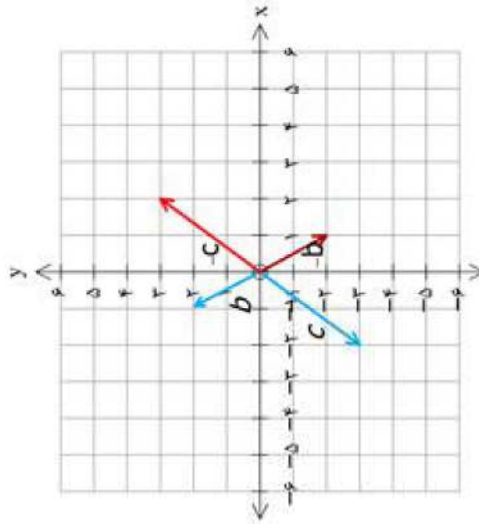
کاربرگاس صفحه ۷۳ الف



$$\vec{a} + \vec{b} = (3/2, 2) + (1/2, 2) = (4/4, 4)$$

@Faragiri12

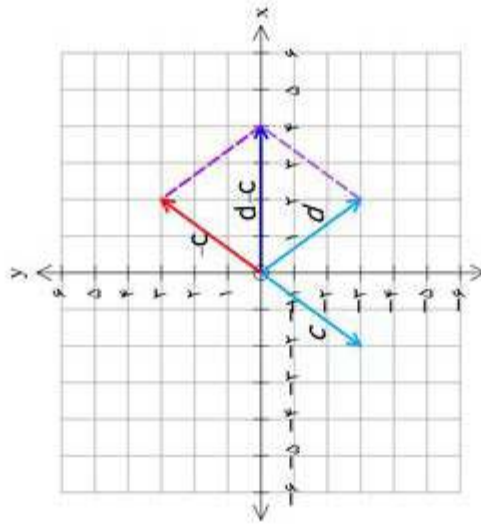
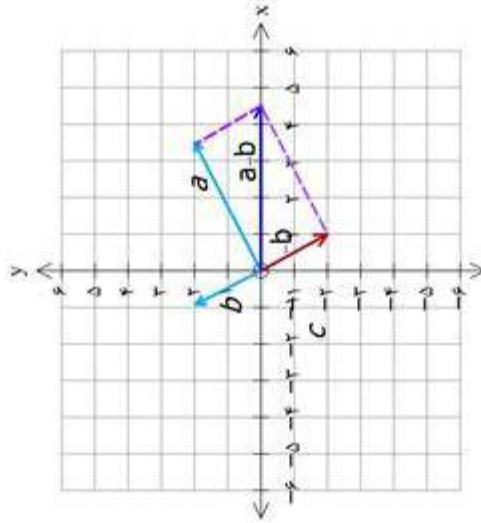
ب



$$\vec{c} = (-2, -1) \Rightarrow -\vec{c} = (+2, +1)$$

$$\vec{b} = (-1, -2) \Rightarrow -\vec{b} = (+1, +2)$$

ج)



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (3 / 5, 2) + (1, -2) = (4 / 5, 0) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 4 / 5$$

$$\vec{d} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c}) = (+2, -3) + (+2, +3) = (4, 0) \Rightarrow |\vec{d} - \vec{c}| = 4$$



© Heyvago 12

6

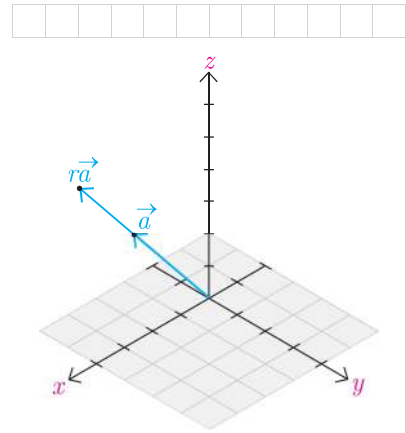
$$\begin{aligned}\vec{a} &= (3 / 5, 4) = 3 / 5 \vec{i} + 4 \vec{j} & \vec{b} &= (-1, 2) = -\vec{i} + 2 \vec{j} & \vec{c} &= (-2, -3) = -2 \vec{i} - 3 \vec{j} \\ \vec{d} &= (+2, -3) = 2 \vec{i} - 3 \vec{j} & \vec{a} + \vec{b} &= (2 / 5, 4) = 2 / 5 \vec{i} + 4 \vec{j} & \vec{a} - \vec{b} &= (4 / 5, 0) = 4 / 5 \vec{i} \\ \vec{d} - \vec{c} &= (4, 0) = 4 \vec{i}\end{aligned}$$



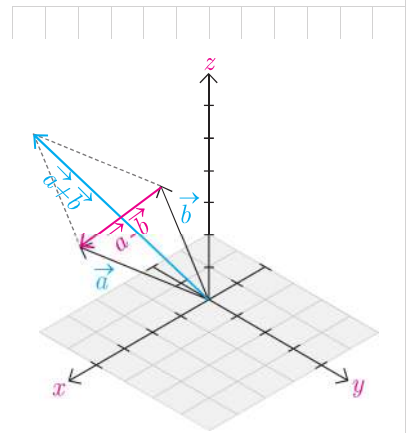
## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

برای هر عدد حقیقی  $r$ ، حاصل ضرب  $r$  در بردار  $\vec{a}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنند.  
 $r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3)$

این شکل دو بردار  $r\vec{a}$ ،  $\vec{a}$  که در آن  $r > 1$  را نشان می‌دهد.  
 آیا راستای  $r\vec{a}$ ،  $\vec{a}$  با هم متفاوت اند؟



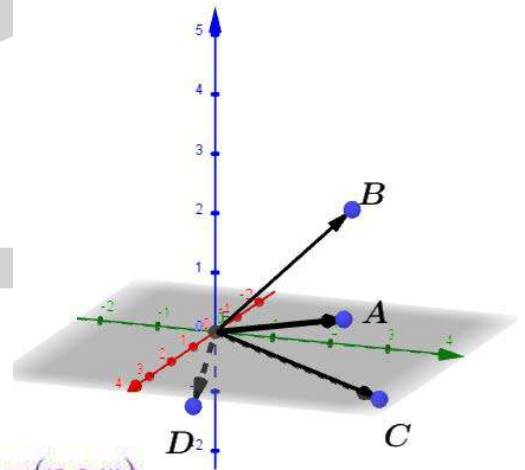
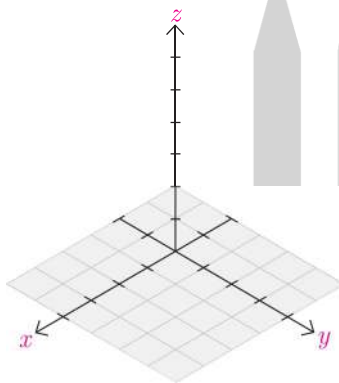
به طور خاص بردار  $-\vec{a}$  را که با  $-\vec{a}$  نشان می‌دهند قرینه  $\vec{a}$  می‌گویند یعنی  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ . این بردار هم اندازه با  $\vec{a}$  (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می‌باشد. اکنون تفاضل بردار  $\vec{b}$  از  $\vec{a}$  یعنی  $\vec{a} - \vec{b}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.  
 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$



در شکل بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و قرینه آن و نیز  $\vec{a} - \vec{b}$  نمایش داده شده‌اند.

### کارد کلاس

نقاط  $A = (2, 3, 1)$ ،  $B = (-1, 2, 2)$  را در  $C = (3, 4, 0)$  و  $D = (1, 0, -1)$  یک دستگاه  $\mathbb{R}^3$  در نظر بگیرید، اگر بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  با نقاط انتهایی به ترتیب  $A, B, C, D$  باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید.



$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, 3, 1) + (-2, 4, 4) = (0, 7, 5)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (2, 3, 1) + [(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = (2, 3, 1) + (2, 6, 2) = (4, 9, 3)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = [(2, 3, 1) + (-1, 2, 2)] + (3, 4, 0) = (1, 5, 3) + (3, 4, 0) = (4, 9, 3)$$

$$-2(\vec{b} + \vec{c}) = -2[(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = -2(2, 6, 2) = (-4, -12, -4)$$

$$-2\vec{b} - 2\vec{c} = -2(-1, 2, 2) - 2(3, 4, 0) = (2, -4, -4) + (-6, -8, 0) = (-4, -12, -4)$$

## خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم. به طور کلی اگر  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  سه بردار دلخواه و  $\vec{O}=(0,0,0)$  بردار صفر و نیز  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

$$1- \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی جمع})$$

$$2- \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری در جمع})$$

$$3- \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O} \quad (\text{عضو قرینه})$$

$$4- \vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{عضو خنثی})$$

$$5- r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$6- (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$7- (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$$

$$8- \text{اگر } \vec{b} = r\vec{a} \text{ آنگاه } |\vec{b}| = |r||\vec{a}| \quad (|r| \text{ قدر مطلق } r \text{ است})$$

## بردارهای یکه

با بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}$  در صفحه  $\mathbb{R}^2$  به ترتیب در جهت محور  $x$  ها و  $y$  ها آشنا شدید. به طور مشابه در  $\mathbb{R}^3$  بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات  $\mathbb{R}^3$  در نظر می‌گیرند.

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

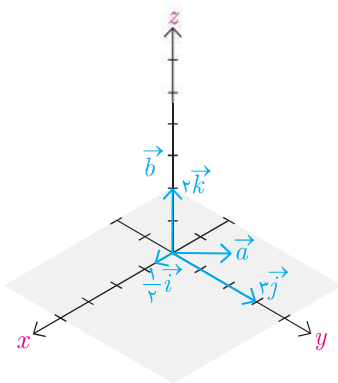
به این ترتیب  $\vec{i}$  بردار یکه در جهت محور طول‌ها،  $\vec{j}$  بردار یکه در جهت محور عرض‌ها و  $\vec{k}$  بردار یکه در جهت محور ارتفاع‌ها می‌باشند.

همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به سادگی می‌توان نشان داد که هر بردار مانند  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  به صورت ترکیبی از بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  قابل بیان است. در واقع داریم:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

**مثال:** بردار  $\vec{a} = (\frac{1}{2}, 3, 2)$  را بر حسب بردارهای یکه  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  نشان دهید.

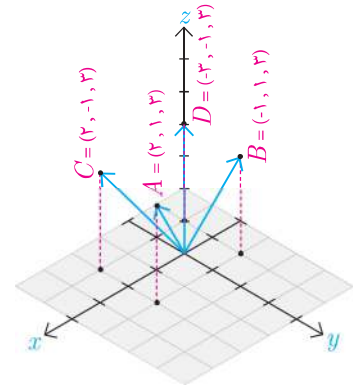
$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$





۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند. **ABDC** الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی  $ABCD$  را بنویسید.

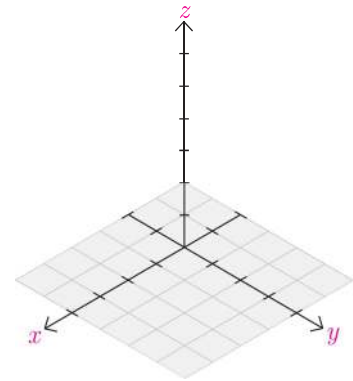
ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح  $ABCD$  هم مساحت و موازی هستند را بنویسید. **ABDC**



۲- نقاط با مختصات  $S=(-2, -2, -2)$  و  $R=(3, 0, -1)$ ،  $Q=(0, -1, -2)$ ،  $P=(1, 0, 1)$  را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

۳- در سؤال قبل طول پاره خط‌های  $PQ$ ،  $RQ$  و  $PS$  را بیابید.

۴- فرض کنید  $P=(x_0, y_0, z_0)$  و  $Q=(x_1, y_1, z_1)$ . مختصات نقطه  $M$  وسط پاره خط  $PQ$  را بیابید.



۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف)  $r\vec{a}-\vec{b}=?$  ،  $r=3$  ،  $\vec{b}=(\sqrt{2}, 1, 1)$  ،  $\vec{a}=(-\frac{1}{3}, 0, 2)$

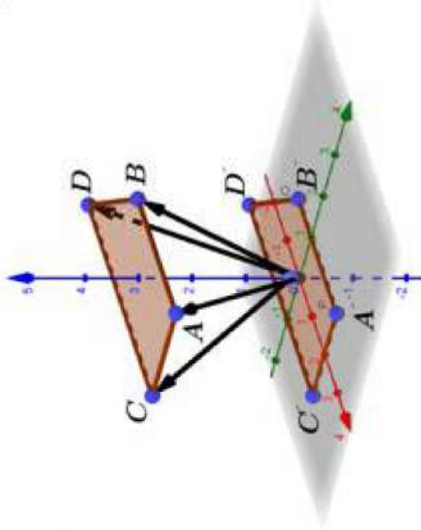
ب)  $r\vec{a}+\vec{b}=?$  ،  $r=-1$  ،  $\vec{b}=(3, 1, -1)$  ،  $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

ج)  $\vec{a}+\vec{b}=?$  ،  $\vec{b}=3\vec{j}+\vec{k}$  ،  $\vec{a}=\sqrt{2}\vec{i}-\vec{k}$

د)  $r\vec{a}+\vec{b}=?$  ،  $r=\frac{1}{5}$  ،  $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$  ،  $\vec{a}=5\vec{k}+\vec{j}$

۶- طول بردار  $\vec{a}$  را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

تمرین ۱:



ب)

@Faragiri12

الف)

$$A = (1, 0, 0) \quad B = (-1, 1, 3) \quad C = (1, -1, 3) \quad D = (-3, -1, 3)$$

$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad BD = \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ y = x + 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$DC = \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \quad CA: \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$A' = (1, 0, 1) \quad B' = (-1, 1, 0) \quad C' = (1, -1, 0) \quad D' = (-3, -1, 0)$$

$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ y = x + 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$D'C' = \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad C'A': \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

پاسخ تمرين ۱ اگر مختصات نقطه D را تغيير دهيم يعنى به صورت  $D = (-1, -1, \mu)$  باشد

$$A = (\mu, 1, \mu) \quad B = (-1, 1, \mu) \quad C = (\mu, -1, \mu) \quad D = (-1, -1, \mu)$$

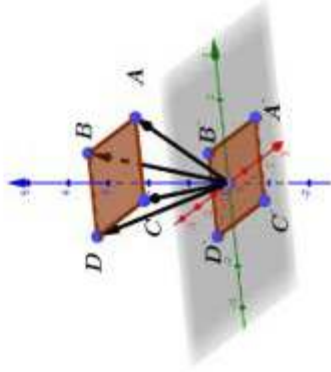
$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases} \quad BD = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow ABCD = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$CD = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases} \quad AC = \begin{cases} x = \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$A' = (\mu, 1, 0) \quad B' = (-1, 1, 0) \quad C' = (\mu, -1, 0) \quad D' = (-1, -1, 0)$$

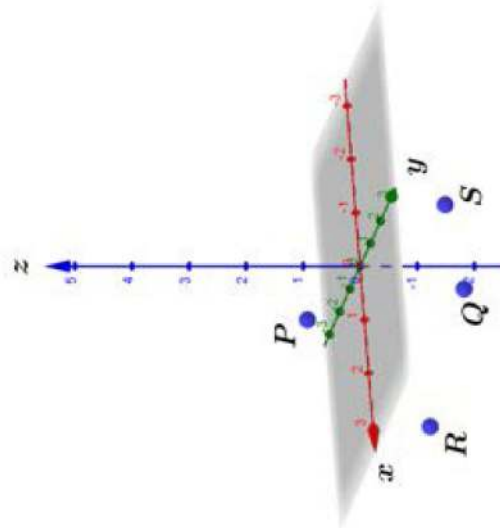
$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A'B'C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad A'C' = \begin{cases} x = \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$





تمرین ۲:



@Faragiri12

تمرین ۳:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^p + (y_Q - y_P)^p + (z_Q - z_P)^p} = \sqrt{(0-1)^p + (-1-0)^p + (-\mu-1)^p} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$RQ = \sqrt{(x_Q - x_R)^p + (y_Q - y_R)^p + (z_Q - z_R)^p} = \sqrt{(0-3)^p + (-1-0)^p + (-\mu+1)^p} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

$$PS = \sqrt{(x_S - x_P)^p + (y_S - y_P)^p + (z_S - z_P)^p} = \sqrt{(-\mu-1)^p + (-\mu-0)^p + (-\mu-1)^p} = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27}$$

تمرین ۴:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{\mu}, y_M = \frac{y_P + y_Q}{\mu}, z_M = \frac{z_P + z_Q}{\mu} \Rightarrow M = \left( \frac{x_P + x_Q}{\mu}, \frac{y_P + y_Q}{\mu}, \frac{z_P + z_Q}{\mu} \right)$$

تمرین ۵: الف)

$$\bar{r}\bar{a} - \bar{b} = 3 \left( \frac{-1}{3}, 0, 2 \right) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (-1, 0, 6) - (\sqrt{2}, 1, 1) = (\sqrt{2} - 1, -1, 5)$$

ب)

$$\bar{r}\bar{a} + \bar{b} = -1(3, 2, -1) + (3, 1, -1) = (-3, 2, -1) + (3, 1, -1) = (0, 3, -2)$$

ج)

$$\bar{a} + \bar{b} = (\sqrt{2}, 0, -1) + (0, 3, 1) = (\sqrt{2}, 3, 0)$$

د)

$$\bar{r}\bar{a} + \bar{b} = \frac{1}{5}(0, 1, 5) + (1, 0, -1) = \left( 0, \frac{1}{5}, 1 \right) + (1, 0, -1) = \left( 1, \frac{1}{5}, 0 \right)$$

تمرین ۶: الف)

$$\vec{a} = \left( \frac{-1}{\mu}, 0, \mu \right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left( \frac{-1}{\mu} \right)^2 + 0^2 + \mu^2} = \sqrt{\frac{1 + \mu^6}{\mu^2}} = \sqrt{\frac{\mu^7}{\mu^2}} = \frac{\sqrt{\mu^7}}{\mu}$$

ب)

$$\vec{a} = (\mu, \mu, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + (-1)^2} = \sqrt{2\mu^2 + 1} = \sqrt{14}$$

ج)

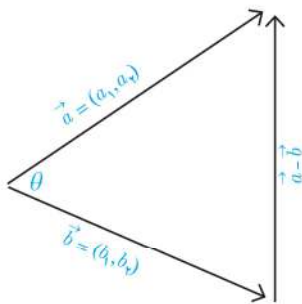
$$\vec{a} = (\sqrt{\mu}, 0, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{\mu})^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{\mu + 1} = \sqrt{13}$$

د)

$$\vec{a} = (0, 1, 5) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 1 + 25} = \sqrt{26}$$



## ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها



فرض کنید دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  همانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار ( $\theta$ ) را پیدا کنیم.

برای این منظور بردار تفاضل  $\vec{a} - \vec{b}$  را نیز در این شکل رسم کرده‌ایم تا مثلی به طول اضلاع زیر به دست آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورت کسر فوق را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند به صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس عبارت (1) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار  $0 \leq \theta \leq \pi$  به دست می آید.  
 کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نشان می دهند  
 و به آن حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه ای دو بردار  $\vec{a}, \vec{b}$  می گویند. بنابراین  
 می توان نوشت.

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

به طور مشابه حاصل ضرب داخلی دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  نیز قابل تعریف است.

**تعریف:** اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  باشند؛  
 در این صورت ضرب داخلی  $\vec{a}$  در  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نمایش می دهیم  
 به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می توان نشان داد که اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار ناصفر  
 $\vec{a}, \vec{b}$  در  $\mathbb{R}^3$  باشند آنگاه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دو بردار  $\vec{a}, \vec{b}$  صفر باشند آنگاه  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  هر چند که در این حالت زاویه  $\theta$  بین دو بردار تعریف نمی شود.

**مثال:** زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  را پیدا می کنیم.

**حل:** ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 0) = 3$$

از طرفی اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

■ خواص ضرب داخلی

۱-  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  خاصیت جابه جایی

اثبات:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$

۲-  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

اثبات:  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

۳-  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  خاصیت شرکت پذیری

اثبات:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$

$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$

$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

۴- برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a$  و  $b$  برهم عمود هستند

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  (با شرط  $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ )

۵-  $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$

۶-  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$  (نامساوی کوشی شوارتز) منظور از  $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$  قدر مطلق مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  است.

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$

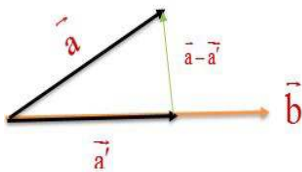
که در آخرین نامساوی از  $|\cos \theta| \leq 1$  استفاده شده است.

■ تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر بردار  $\vec{b}$

دو بردار غیر صفر  $\vec{a}, \vec{b}$  را که زاویه بین آنها  $\theta$  است با فرض  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  در نظر می گیریم. می خواهیم تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  که آن را با  $\vec{a}'$  نمایش داده ایم به دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک  $r$  حقیقی  $\vec{a}' = r \vec{b}$ . با توجه به اینکه بردار تفاضل  $\vec{a}$  از  $\vec{a}'$  بر بردار  $\vec{b}$  عمود است. خواهیم داشت:

$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - r \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - r \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

$$\begin{aligned} & |(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)| \\ &= |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



# هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

بنابراین بردار تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{a}' = r \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

**مثال:** تصویر قائم بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  را بر امتداد بردار  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + (2)(0) = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{3}{2} b = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

## کاردرکلاس

۱- تصویر بردار  $i = (1, 0, 0)$  بر امتداد بردار  $j = (0, 1, 0)$  را بیابید.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0 \quad |\vec{j}|^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$P_{\vec{j}} \vec{i} = \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|^2} \vec{j} = \frac{0}{1} \vec{j} = 0 \cdot (0, 1, 0) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

۲- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

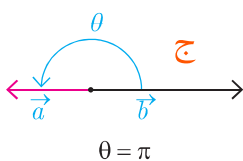
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{0}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = 0 \cdot (b_1, b_2, b_3) = \vec{0}$$

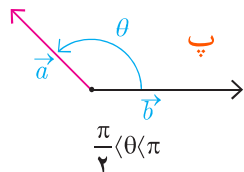
۳- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در یک راستا باشند آنگاه تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر خود  $\vec{a}$  می شود.

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.

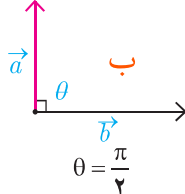
ج)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b|$



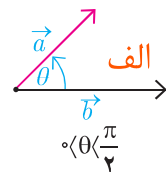
ت)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|$



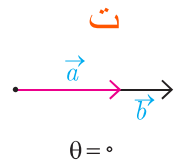
پ)  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$



ب)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



الف)  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$





الف) هرگاه  $a, b$  موازی و هم جهت باشند پس  $\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 0^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \times 1 = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{b}|} \vec{b} = |\vec{a}| \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} \vec{b} \xrightarrow{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} = 1} P_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \vec{b} = \vec{a}$$

بردار  $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$  برداری به طول ۱ می باشد که هم جهت با  $\vec{a}$  است

ب) هرگاه  $a, b$  موازی و در خلاف جهت هم باشند پس  $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \times (-1) = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{-|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{b}|} \vec{b} = -|\vec{a}| \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} \vec{b} \xrightarrow{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} = 1} P_{\vec{b}} \vec{a} = -|\vec{a}| \vec{b} = -\vec{a}$$

بردار  $\frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}$  برداری به طول ۱ می باشد که در خلاف جهت با  $\vec{a}$  است

## ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می توان ضرب دو بردار را به گونه ای تعریف کرد که حاصل ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

**تعریف:** فرض کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. ضرب داخلی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \times \vec{b}$  نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

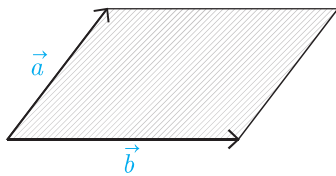
اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار غیر صفر و  $\theta$  زاویه بین آنها باشد اندازه بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$  می شود:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)|^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + \\ &+ a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_2 a_1 b_2 b_1 + a_1^2 b_2^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_2)^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos^2 \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{a}| |\vec{b}| (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin^2 \theta = \\ &(|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta$$

بنابراین

از هندسه سال قبل می دانیم که سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر  $|\vec{a}|$  و  $|\vec{b}|$  است.



**مثال:** بردارهای  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  در  $\mathbb{R}^3$  در نظر بگیرید. حاصل  $\vec{i} \times \vec{j}$  و  $\vec{j} \times \vec{i}$  را به دست آورید.

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

$$= ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$$

$$= ((1)(0) - (0)(0), (0)(1) - (0)(0), (0)(0) - (1)(1)) = (0, 0, -1) = -\vec{k}$$

همان طور که مشاهده شد حاصل ضرب خارجی دو بردار  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  برابر با بردار  $\vec{k}$  شد که بر هر دوی  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  عمود می باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می باشد.

**خاصیت ۱:** فرض کنید  $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. در این صورت

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که  $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$  و  $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$  بنا بر این با توجه به آنچه تاکنون به دست آمده است می توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است. اثبات این خاصیت در ادامه می آید.

**اثبات:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

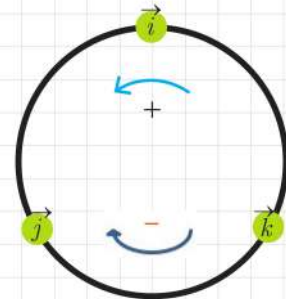
$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

می توان نشان داد که برای سه برداری که  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  روابط زیر برقرار است:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

معمولاً این روابط را به صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می دهند.



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{خاصیت ۲:}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۳:}$$

$$r \vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r \vec{b} \quad \text{خاصیت ۴: اگر } r \text{ عددی حقیقی باشد، آنگاه:}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \text{برای سه بردار داریم:} \quad \text{خاصیت ۵:}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \text{خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر } \vec{a}, \vec{b} \text{ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر}$$

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$$

**اثبات:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

### حجم متوازی السطوح

اگر  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می توان به کمک آنها متوازی السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.

همان طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه

تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر روی بردار  $\vec{b} \times \vec{c}$  یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید شده پس مساحت

آن برابر است با  $|\vec{b} \times \vec{c}|$ . با استفاده از دترمینان نیز می توان مساحت متوازی الاضلاع پدید

آمده توسط دو بردار  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{مساحت } S = |\vec{b} \times \vec{c}|$$

بهتر است به این شکل نوشته شود

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{اندازه ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم متوازی السطوح} \quad \left| \vec{b} \times \vec{c} \right| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم

متوازی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا

در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ . حجم

متوازی السطوح پدید آمده توسط سه بردار  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  و  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  با استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می آید.

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حجم} = V = |K|$$

$$\text{یا } K = a \cdot (b \times c)$$

اگر  $K = 0$  در این صورت چه نتیجه ای می گیرید؟ سه بردار در یک صفحه واقعند

**مثال:** حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای  $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ،

$$\vec{b} = (0, 1, 1) \text{ و } \vec{c} = (1, 0, 1)$$

تولید می شود.

**حل:** با استفاده از ضرب خارجی  $b$  در بردار  $c$  به دست می آید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1, 1, -1)$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می آید.

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2$$

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

پیش تر اشاره شد که اگر سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی السطوح و نیز  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  برابر صفر می شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می شود.

**مثال:** آیا بردارهای  $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ،  $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ،  $\vec{c} = (1, 9, -1)$  در یک صفحه اند؟  
**حل:** برای این منظور کافی است  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی السطوح تولید شده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (-16, 14, 10) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -32 + 42 - 10 = 0 \Rightarrow \text{سه بردار در یک صفحه هستند.}$$



۱- برای هر یک از بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  که در زیر آمده است تصویر قائم  $\vec{a}$  را بر امتداد  $\vec{b}$  به دست آورید.

الف)  $\vec{b} = i$ ،  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  (ب)  $\vec{b} = (3, 2, 1)$ ،  $\vec{a} = (2, 3, 1)$   
 ج)  $\vec{b} = (-1, 2, 4)$ ،  $\vec{a} = (1, 1, 0)$

۲- فرض کنید  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  بردارهایی باشند به ترتیب به طول های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$  را محاسبه کنید.

۳- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ .

۴- اگر  $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ ،  $\vec{b} = (3, -4, 2)$  و  $\vec{a} = (1, -3, 4)$  باشند آنگاه تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ ،  $\vec{a} = (1, -3, 2)$  بردار پیدا کنید.

۶- سه بردار  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  مثال بزنید که برای آنها  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$  ولی  $\vec{b} \neq \vec{c}$ . آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض اند به طوری که  $|\vec{a}| = 3$ ،  $|\vec{b}| = 26$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . مقدار  $a \cdot b$  را محاسبه کنید.

**C** **B**  
 ۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط  $A = (3, 5, 7)$ ،  $b = (5, 5, 0)$ ،  $A = (-4, 0, 4)$  داده شده است را بیابید.

تمرین: الف)

$$\vec{a} = (\mu, -1, \mu) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1) \times 0 + \mu \times 0 = 2$$

$$\vec{b} = (1, 0, 0) \quad |\vec{b}|^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

$$\vec{P}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{2}{1} (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

ب)

$$\vec{a} = (\mu, \mu, 1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times \mu + \mu \times \mu + 1 \times 1 = 1 + \mu$$

$$\vec{b} = (\mu, \mu, 1) \quad |\vec{b}|^2 = \mu^2 + \mu^2 + 1 = 1 + 2\mu^2$$

$$\vec{P}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{1 + \mu}{1 + 2\mu^2} (\mu, \mu, 1) = \left( \frac{\mu(1 + \mu)}{1 + 2\mu^2}, \frac{\mu(1 + \mu)}{1 + 2\mu^2}, \frac{1 + \mu}{1 + 2\mu^2} \right)$$

ج)

$$\vec{a} = (1, 1, 0) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 2$$

$$\vec{b} = (-1, \mu, 1) \quad |\vec{b}|^2 = (-1)^2 + \mu^2 + 1^2 = 2 + \mu^2$$

$$\vec{P}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{2}{2 + \mu^2} (-1, \mu, 1) = \left( \frac{-2}{2 + \mu^2}, \frac{2\mu}{2 + \mu^2}, \frac{2}{2 + \mu^2} \right)$$

تمرین ۲ روش اول

@Faregh12

$$\begin{aligned}
 & \bar{a} + \mu \bar{b} + \lambda \bar{c} = \mu \\
 & \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0 \xrightarrow{(\bar{a})} \bar{a} + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} = 0 \\
 & \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0 \xrightarrow{(\bar{b})} \bar{a}\bar{b} + \bar{b} + \bar{b}\bar{c} = 0 \\
 & \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0 \xrightarrow{(\bar{c})} \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c} = 0 \\
 & \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \mu\bar{a}\bar{b} + \mu\bar{b}\bar{c} + \mu\bar{a}\bar{c} = 0 \Rightarrow \underbrace{\mu^2 + \mu^2 + \mu^2}_{1\text{F}} + \mu(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}) = 0 \Rightarrow \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c} = -\gamma
 \end{aligned}$$

روش دوم ترین ۲:

$$|\vec{a}| = \mu, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = \mu$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = \mu \times 1 \times 0 = 0 \\ \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \pi = 1 \times \mu \times (-1) = -\mu \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \mu + (-\mu) + (-\mu) = -\mu \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \pi = \mu \times \mu \times (-1) = -\mu^2 \end{aligned}$$

روش سوم ترین ۲:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) &= \vec{0} \cdot \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \\ \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \mu \vec{a} \cdot \vec{b} + \mu \vec{a} \cdot \vec{c} + \mu \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \Rightarrow \mu^2 + \mu^2 + \mu^2 + \underbrace{\mu(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c})}_{1\mu} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -\mu \end{aligned}$$



@Faragiri12

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{j} \\ \vec{c} = \vec{k} \end{array} \right\} \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

تمرین ۳:

تمرین ۳:

$$\vec{m} = \vec{b} + \vec{c} = (\mu - 1, -\mu + 1, \mu + 4) = (\mu, -\mu, 6)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{a} = (1)(\mu) + (-\mu)(-\mu) + (6)(6) = \mu + 9 + \mu^2 = \mu^2 + \mu + 9$$

$$|\vec{m}|^2 = \mu^2 + (-\mu)^2 + 6^2 = \mu^2 + \mu^2 + 36 = 2\mu^2 + 36$$

$$P_{\vec{b}+\vec{c}}^{\vec{a}} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{a}}{|\vec{m}|} = \frac{\mu^2 + \mu + 9}{\sqrt{2\mu^2 + 36}} = \frac{\mu^2 + \mu + 9}{\sqrt{2(\mu^2 + 18)}} = \frac{\mu^2 + \mu + 9}{\sqrt{2} \sqrt{\mu^2 + 18}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

تمرین ۵:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 1\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow \vec{c} = (13, 1, -5), \vec{c} \perp \vec{b}, \vec{c} \perp \vec{a}$$

تمرین ۶:

$$\vec{a} = (1, 1, 1) \quad \vec{b} = (2, 2, 2) \quad \vec{c} = (3, 3, 3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \neq \vec{c}$$

با توجه به مثال نقض بالا، قاعده حذف همواره برقرار نیست

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b} - \vec{c}| \sin \theta = 0$$

$$\text{اگر بخواهیم } \vec{c} = \vec{b} \text{ در نظر بگیریم} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| \neq 0 \\ \sin \theta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \parallel \vec{b} - \vec{c} \end{cases}$$

@Faragini12

تمرین ۷:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow \sqrt{12} = 3 \times \sqrt{6} \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{12}}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 3 \times \sqrt{6} \times \left(\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \pm 4\sqrt{2}$$

تمرین ۸:

$$\vec{AB} = (1, 0, -1) \quad \vec{AC} = (-1, -5, -3)$$

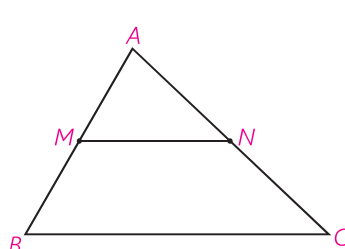
$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-15) + 5 \cdot (-3) - 1 \cdot (-5) = 15 - 15 + 5 = 5$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

در این فصل با بردارها و خواص جالبی از آنها آشنا شدید. جالب است بدانید بردارها در حل بسیاری از مسائل هندسی که در سال‌های گذشته با آنها آشنا شده‌اید می‌توانند کاربرد داشته باشند و اثبات برخی قضایا را راحت‌تر می‌کنند. در ادامه چند مثال از این گونه مسائل آورده شده است که مطالعه آنها به علاقه‌مندان پیشنهاد می‌گردد.

**مثال ۱:** ثابت کنید پاره خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

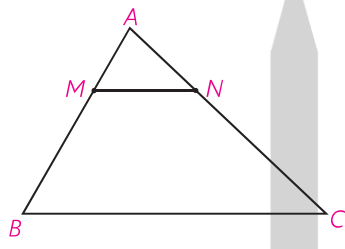
**اثبات:**



$$\begin{aligned} \vec{MA} + \vec{AN} &= \vec{MN} \Rightarrow \\ 2\vec{MA} + 2\vec{AN} &= 2\vec{MN} \Rightarrow \\ \vec{BA} + \vec{AC} &= 2\vec{MN} \Rightarrow \\ \vec{BC} &= 2\vec{MN} \end{aligned}$$

پس طول  $BC$  دو برابر طول  $MN$  است و چون  $BC$  مضربی از  $MN$  است لذا  $BC$  موازی  $MN$  است.

**مثال ۲:** در مثلث  $ABC$ ،  $MN \parallel BC$  ثابت کنید:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

(قضیه تالس)

**اثبات:** فرض کنیم  $BA = K \cdot MA$  و  $AC = K' \cdot AN$  و  $BC = K'' \cdot MN$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= K \cdot \vec{MA}, \quad \vec{AC} = K' \cdot \vec{AN}, \quad \vec{BC} = K'' \cdot \vec{MN} \\ \vec{MA} + \vec{AN} &= \vec{MN}, \quad \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC} \Rightarrow \\ K \cdot \vec{MA} + K' \cdot \vec{AN} &= K'' \cdot \vec{MN} = K''(\vec{MA} + \vec{AN}) = \\ K'' \cdot \vec{MA} + K'' \cdot \vec{AN} &\Rightarrow (K - K'') \vec{MA} + (K' - K'') \vec{AN} = \vec{0} \end{aligned}$$

ولی  $a \vec{MA}$  و  $b \vec{AN}$  بردارهایی در راستا و جهت‌های مختلف‌اند، پس مجموع آنها نمی‌تواند صفر شود مگر آنکه:

$$K - K'' = K' - K'' = 0$$

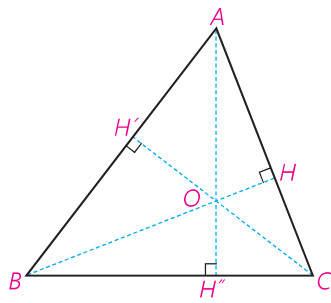
و در نتیجه:  $K = K' = K''$  و از آنجا حکم ثابت می‌شود.

## هیوا تخصصی ترین سایت مشاوره کشور

مجله ریاضی

(خواندنی)

**مثال ۳:** ثابت کنید در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه هم‌رس‌اند.



**اثبات:** فرض کنیم ارتفاع‌های  $BH$  و  $CH'$  همدیگر را در نقطه  $O$  قطع کنند.

در این صورت داریم:

$$BH \perp AC \Rightarrow \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0, \vec{BO} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$CH' \perp AB \Rightarrow \vec{CH'} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{CO} \cdot \vec{AB} = 0$$

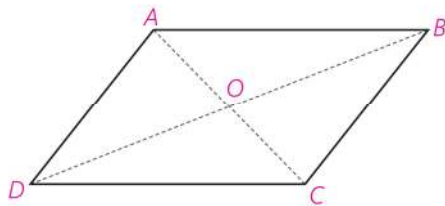
$$\Rightarrow \vec{AO} \cdot \vec{BC} = \vec{AO} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = \vec{AO} \cdot \vec{AC} - \vec{AO} \cdot \vec{AB}$$

$$= (\vec{BO} - \vec{BA}) \cdot \vec{AC} - (\vec{CO} - \vec{CA}) \cdot \vec{AB} = \vec{BO} \cdot \vec{AC} - \vec{BA} \cdot \vec{AC}$$

$$- \vec{CO} \cdot \vec{AB} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -\vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = 0$$

بنابراین  $AO \perp BC$  و لذا امتداد  $AO$  هم بر  $BC$  عمود است و ارتفاع رأس  $A$  هم از  $O$  می‌گذرد.

**مثال ۴:** ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن با هم موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



**اثبات:** در شکل مقابل، با فرض اینکه  $AB \parallel CD$  و  $AB = CD$

نتیجه می‌شود:

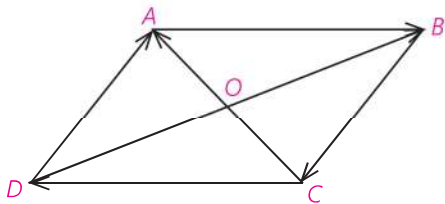
$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD} \Rightarrow \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OA} - \vec{OD} \Rightarrow \vec{CB} = \vec{DA}$$

و بنابراین:  $CB \parallel DA$  و  $CB = DA$  و  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است.

**مثال ۵:** ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

**اثبات:**



$$\left. \begin{aligned} \vec{OA} + \vec{AB} &= \vec{OB} \\ \vec{OC} + \vec{CD} &= \vec{OD} \end{aligned} \right\} +$$

$$(\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{AB} + \vec{CD}) = \vec{OB} + \vec{OD} \Rightarrow$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$$

اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.